數學傳播　33卷4期, pp. 47-62

線性遞迴關係之求解(上)

張福春 · 莊淨惠

1. 前言

在數學上, 遞迴關係 (recurrence relation), 是一種遞迴地定義一個序列的方程式: 序列的每一項目定義爲前面項的函數。即某件事情發生的過程中, 又包含了與事情本身很類似的另一件事情, 而且這種包含關係可以無止盡地發展下去; 類似的概念即發展出一個非常重要的技巧, 稱爲遞迴 (recursion)。

解這一類的問題通常可分成下列三個步驟:

(1) 根據題目的條件構造一個數列 $\{a_n\}$, 觀察數列的前幾項值。

(2) 建立相鄰項間的遞迴關係。

(3) 解遞迴關係式: 求解一般項 a_n。

此種處理問題的方法叫做遞迴方法。

數列是應用數學中經常出現的觀念, 而遞迴關係是研究數列的一個重要工具, 對於每一個數學分支如: 代數 、機率 、統計 、演算法 、計算科學 、電路分析 、動態系統 、經濟 、生物及其他領域問題上都有許多應用, 特別是在組合學的計數問題上有許多重要的應用。

遞迴關係的研究可以追溯到 13世紀初著名的義大利數學家費布那西 (Fibonacci), 提出的費布那西關係

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0, \quad F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

在他的經典著作『算盤書』(研究算術代數的書籍) 中, 提出一個有趣的兎子問題:『假設兎子出生以後兩個月, 每個月都能生小兎, 若每次不多不少恰好生一對 (一雌一雄)。如果今天養了初生的小兎一對, 試問 n 年後共可有多少對兎子 F_n (如果生下的小兎都不死的話)? 』後來發現其結果與一數列:

表1. 費布那西數列

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	$\cdots$

有相當的關係, 而此數列更與一些大自然的變化息息相關, 這就是著名的『費布那西數列』。有關費布那西數列更多詳細的介紹可參考網站 Fibonacci Numbers (Loy, 2007), 網站裡介紹許多費布那西數的特性及應用例子。

Kelley and Peterson (2000) 第一章先對遞迴關係的基本定義作簡單的介紹, 第二章介紹解遞迴關係會運用到的運算子, 第三章則將遞迴關係作詳細的分類介紹及應用和解題方法。Grimaldi (1999) 將遞迴關係做一個 12頁的重點整理: 包括基本定義 、概念, 還有一些常見重要與計數相關的遞迴關係的例子, 及解遞迴關係常用的方法。D'Angelo and West (1999) 第十二章將遞迴關係作基本的分類介紹。Spiegel (1971) 第五章介紹遞迴關係的定義, 第六章則介紹應用的例子。關於著名整數數列的遞迴關係及其相關性質, 請參閱世界上收錄最齊全的網路整數數列百科全書 "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" (Sloane, 2007)。

本文的目的首先是要讓讀者熟悉遞迴關係的基本定義 、性質, 主要是介紹單一遞迴數列的求解方法, 舉出一些著名的例子, 針對可求解各種不同的形式: 齊次 、非齊次 、常係數等, 分別介紹其常用的解題方法。遞迴關係是一個解決組合問題的急切工具, 一旦學會基本定義 、性質, 加上一些例子的輔助, 再將其應用, 即可解決許多數列相關的問題。

在第二節先介紹遞迴關係的基本定義及一些著名的例子。第三節介紹一階線性遞迴關係的一些定理及基本解題方法和例題。第四節介紹簡單的常係數線性遞迴關係, 分別對齊次和非齊次作探討, 然後再針對其特徵方程式的解爲重根 、相異根 、共軛複根分別一一作介紹。在許多應用軟體中也可以求解遞迴關係, 在附錄裡, 提出一個功能強大的軟體 *Mathematica* (Wolfram 2003), 介紹如何應用此程式求解遞迴關係式。本文中的例子及習題的解答都已經過 *Mathematica* 的求解核對無誤。

2. 遞迴關係 (recurrence relation)

在數學上, 遞迴關係式 (recurrence relation), 是一種遞迴地定義一個序列的方程式。本節介紹遞迴關係的基本定義及一些著名的例子。

2.1. 定義

首先介紹遞迴關係的基本定義。

定義 2.1: (**遞迴關係**) 假設 $\{a_n\}$ 爲一個數列, 而對於 $n \geq n_0$, 每一個 a_n 與它前面的項 a_i, $i < n$, 滿足方程式 $f(a_n, a_{n-1}, \ldots) = 0$ 稱爲遞迴關係。

例 2.1: $a_n = 2a_{n-1} + 5$ 爲一遞迴關係式。

例 2.2: $a_n a_0 + a_{n-1}a_1 + \cdots + a_0 a_n = 1$ 爲一遞迴關係式。

定義 2.2: (k **階遞迴關係**) 型如 $f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}) = 0$ 的遞迴關係, 稱爲 k 階遞迴關係。

例 2.3: $a_n - 10n^2 a_{n-1} + 21na_{n-2} - 8a_{n-3} = 0$ 是一個三階遞迴關係式。

定義 2.3: (k **階線性遞迴關係**) 型如 $c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + \cdots + c_k(n)a_{n-k} = f(n)$, $c_0(n), c_k(n) \neq 0$ 的遞迴關係, 稱爲 k 階線性遞迴關係, 其他形式稱爲非線性遞迴關係。

例 2.4: $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 5a_n = 0$ 是一個二階線性遞迴關係式。

例 2.5: $a_{n+2} - \dfrac{2a_{n+1}}{5a_n} = 0$ 是一個二階非線性遞迴關係式。

定義 2.4: (**齊次遞迴關係**) 如果 $a_n = a_{n-1} = \cdots = 0$ 是遞迴關係 $f(a_n, a_{n-1}, \ldots) = 0$ 的一個解, 則稱 $f(a_n, a_{n-1}, \ldots) = 0$ 爲齊次遞迴關係, 其他形式稱爲非齊次遞迴關係。

例 2.6: $a_{n+3} + 2a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$ 是一個齊次三階遞迴關係式。

例 2.7: $a_{n+3} + 2a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 9$ 是一個非齊次三階遞迴關係式。

定義 2.5: (k**階常係數線性遞迴關係**) 假設 $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, C_0, C_1, \ldots, C_k \in \mathbb{R} = \{x | -\infty < x < \infty\}$, 其中 $C_0, C_k \neq 0$, 令 $a_n, n \geq 0$, 爲一數列, 則

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \cdots + C_k a_{n-k} = f(n), \quad n \geq k \tag{2.1}$$

稱爲一 k 階常係數遞迴關係式 (linear recurrence relation with constant coefficients of order k)。若 $f(n) = 0$, $n \geq k$, 稱此遞迴關係式爲齊次 (homogeneous) 遞迴關係式, 否則稱爲非齊次 (nonhomogeneous) 遞迴關係式。

例 2.8: $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n = 0$ 是一個常係數齊次二階遞迴關係式。

例 2.9: $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n = 2^n\beta$ 是一個常係數非齊次二階遞迴關係式。

例 2.10: $(n+2)a_{n+2} + 4(n+1)a_{n+1} - 12na_n = 2^n\beta$ 是一個非常係數線性非齊次二階遞迴關係式。

2.2. 著名的例子

接著我們來看一些著名的遞迴關係。

例 2.11: (**等比數列**) 公比爲 r 的等比數列 $\{a_n = a_0 r^n\}$ 滿足遞迴關係

$$a_n = ra_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2.2}$$

(2.2) 是一個常係數齊次一階線性遞迴關係。

例 2.12: (**等差數列**) 公差爲 d 的等差數列 $\{a_n = a_0 + nd\}$ 滿足遞迴關係

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \ge 1 \tag{2.3}$$

(2.3) 是一個常係數非齊次一階線性遞迴關係。

例 2.13: (**部分和數列**) 數列 $\{a_n\}$ 的部分和數列 $\{s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\}$ 滿足遞迴關係

$$s_n = s_{n-1} + a_n, \quad n \ge 1 \tag{2.4}$$

(2.4) 是一個常係數非齊次一階線性遞迴關係。

例 2.14: (**費布那西數列**) 費布那西數列 $\{F_n\}$ 滿足遞迴關係

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \ge 0,\ F_0 = 1,\ F_1 = 1 \tag{2.5}$$

(2.5) 是一個常係數齊次二階線性遞迴關係。

例 2.15: (Catalan **數列**) Catalan數列 $\{C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)\}$ 滿足遞迴關係

$$C_n - C_0C_{n-1} - C_1C_{n-2} - \cdots - C_{n-1}C_0 = 0,\ n \ge 1 \tag{2.6}$$

(2.6) 是一個齊次非線性遞迴關係。

例 2.16: ($\sin^n x$ **的不定積分**) 證明

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

其中 $n > 1$是一個正整數。

證明: 利用部分積分, 設 $u = \sin^{n-1} x$ 且 $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$。令

$$I = \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

因爲 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 所以 $I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)I$, 移項作整理即可得 $I = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$。

3. 一階線性遞迴關係 (first-order linear recurrence relation)

一階線性遞迴關係是最簡單的遞迴關係, 它的一般項可以逐項代入求得一般通式。

3.1. 齊次一階線性遞迴關係 (first-order homogeneous linear recurrence relation)

齊次一階線性遞迴關係可以得到下面的公式解。

定理 3.1: (**齊次一階線性遞迴關係**) 設遞迴關係

$$a_{n+1} = g(n)a_n, \quad n \geq 0 \tag{3.7}$$

則 $a_n = (\prod_{k=0}^{n-1} g(k))a_0$。

證明: 將關係式逐項代入即得 $a_n = g(n-1)a_{n-1} = g(n-1)(g(n-2)a_{n-2}) = \cdots = (\prod_{k=0}^{n-1} g(k))a_0$, 故得證。 □

a_n 是否存在一個簡單的公式依賴於 $\prod_{k=0}^{n-1} g(k)$ 是否可以化簡。一般而言如果 $g(k) = h(k)/h(k+1)$, 則 $\prod_{k=0}^{n-1} g(k)$ 可以化簡成 $h(0)/h(n)$, 在此情形下 $a_n = (h(0)/h(n))a_0$。而定理 3.1 的證明可以利用變數代換 $b_n = h(n)a_n$化簡, (3.7) 可以寫成 $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_0$, 因此 $a_n = (h(0)/h(n))a_0$。特殊情形 $g(k) = \alpha$ 爲一常數時, $h(k)$ 可以取成 $1/\alpha^k$。

當定理 3.1 中的 $g(n)$ 是一常數 α 時, (3.7) 式爲常係數齊次一階線性遞迴關係式, 前後項的比 $a_{n+1}/a_n = \alpha$。很明顯 $a_n = \alpha^n a_0$, 因此 $\{a_n\}$ 是一個公比爲 α 的等比數列。

例 3.1: 設 $a_n = 4a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 6$, 求 a_n 的一般解。

解: 將關係式逐項代入即得

$$\begin{aligned} a_0 &= 6 \\ a_1 &= 4a_0 = 4(6) \\ a_2 &= 4a_1 = 4^2(6) \\ &\vdots \\ a_n &= 4^n(6) \end{aligned}$$

所以, $a_n = 6(4^n)$ 是此遞迴關係式的一般解。 □

例 3.2: (**排列**) 設有 n 個不同的字母, 求所有排列的個數。

解: 設排列的個數爲 a_n, 考慮最後一個位置的排法, 他可以放任一個字母, 故有 n 個放法。而對於每一個情況前面 $n-1$ 個位置的排法有 a_{n-1} 種。由計數的乘法原理得 $a_n = na_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_1 = 1$, 由定理 3.1 得 $a_n = n!$。 □

例 3.3: (**生長模型**) 某種細菌的繁殖率是每小時三倍遞增, 如果六小時之後有 100000 隻細菌, 則請問最初是有多少隻細菌?

解: 設 a_n 是 n 小時後的細菌總數, 則 $a_{n+1}=3a_n$, $n>0$, 所以 $a_n=a_0(3^n)$。因此 $100000=a_0(3^6)$, 可求出 $a_0=137.174\cong 138$, 所以最初有 138 隻細菌。 □

3.2. 非齊次一階線性遞迴關係 (first-order nonhomogeneous linear recurrence relation)

非齊次一階線性遞迴關係可以得到下面的表達式。

定理 3.2: (**非齊次一階線性遞迴關係**) 設遞迴關係

$$a_{n+1}=g(n)a_n+f(n),\ n\geq 0 \tag{3.8}$$

則 $a_n=(\prod_{k=0}^{n-1}g(k))a_0+\sum_{k=0}^{n-1}(\prod_{m=k+1}^{n-1}g(m))f(k)$, 其中 $\prod_{m=n}^{n-1}g(m)\equiv 1$。

證明: 將關係式逐項代入即得 $a_n=g(n-1)a_{n-1}+f(n-1)=g(n-1)(g(n-2)a_{n-2}+f(n-2))+f(n-1)=\cdots=(\prod_{k=0}^{n-1}g(k))a_0+\sum_{k=0}^{n-1}(\prod_{m=k+1}^{n-1}g(m))f(k)$, 故得證。 □

當定理 3.2 中的 $g(n)$ 是一常數 α 時, (3.8) 式爲常係數非齊次一階線性遞迴關係式, $a_n=\alpha^n a_0+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k f(n-1-k)$。

例 3.4: 求解遞迴關係

$$a_n=2a_{n-1}+3,\ n\geq 2,\ a_1=3$$

解: 根據定理 3.2, 逐項代入得 $a_n=2a_{n-1}+3=2(2a_{n-2}+3)+3=2^2a_{n-2}+(2+1)\cdot 3=2^2(2a_{n-3}+3)+(2+1)\cdot 3=2^3a_{n-3}+(2^2+2+1)\cdot 3=\cdots=2^{n-1}a_1+(2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1)\cdot 3=2^{n-1}\cdot 3+(2^{n-1}-1)\cdot 3=3(2^n-1)$, $n\geq 1$。 □

例 3.5: (**河內塔問題** (Tower of Hanoi)) 根據一個古老的故事, 在遠東的某處有一個寺院, 裏面有一堆六十四個由大到小純金打造的盤子。有一回, 這些盤子被疊在一起, 最大的盤子放在最底層。每一個盤子被穿了一個孔, 放在木樁 A 上。另有兩根木樁 B 和 C。它們可以根據底下的規則由一個位置搬移到另外一個位置: (1) 一次只能移動一個盤子。(2) 大盤子永遠不能放在小盤子的上面。求最少次數從木樁 A 全部被搬到木樁 C。

解: 河內塔問題是法國數學家 Edouard Lucas 於 1883年提出的謎題。

首先我們先來討論幾個數量較少的情形: (首先將盤子由小到大依序編號爲 $1,2,\ldots,n$)

當 $n = 1$: 直接把盤子從 A 移到 C, 次數只有一次。
當 $n = 2$: 移動次序如下:

(1) 移動盤子 1從木樁 A 到木樁 B。
(2) 移動盤子 2從木樁 A 到木樁 C。
(3) 移動盤子 1從木樁 B 到木樁 C。
因此, 總共須移動 $2^2 - 1 = 3$ 次。

當$n = 3$: 移動次序如下:

(1) 移動盤子 1從木樁 A 到木樁 C。
(2) 移動盤子 2從木樁 A 到木樁 B。
(3) 移動盤子 1從木樁 C 到木樁 B。
(4) 移動盤子 3從木樁 A 到木樁 C。
(5) 移動盤子 1從木樁 B 到木樁 A。
(6) 移動盤子 2從木樁 B 到木樁 C。
(7) 移動盤子 1從木樁 A 到木樁 C。
因此, 總共須移動 $2^3 - 1 = 7$次。

可參考圖 1:

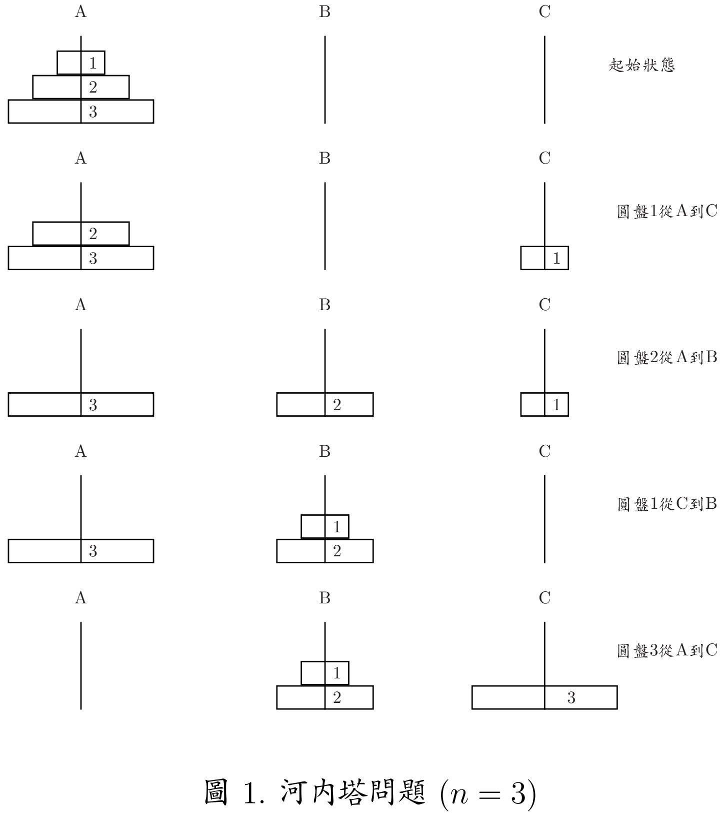


圖 1. 河內塔問題 $(n = 3)$

當任意 n 個盤子需搬移時, 我們可以歸納出一套規則。

(1) 先將 $1 \sim n-1$ 號盤子從 A 搬至 B。
(2) 將 n 號盤子由 A 搬至 C。
(3) 再將 $1 \sim n-1$ 號盤子從 B 搬至 C。

設 a_n 爲搬 n 個盤子所需搬動次數, a_{n-1} 則是搬 $n-1$ 個盤子所需搬動次數。很明顯 $a_0=0$, 而 $a_n=2a_{n-1}+1$。我們可以直接套用定理 3.2 得 $a_n=\sum_{k=0}^{n-1} 2^k=2^n-1$, 或是將遞迴關係改寫成 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$, 可以得到 $a_n+1=2^n(a_0+1)=2^n$, 因此 $a_n=2^n-1$。

對一堆六十四個盤子而言, 其結果 $a_{64}=2^{64}-1\approx 1.84\times 10^{19}$ 次的搬動。如果每秒能搬動一次, 大概需要 5850億年! 如果一部高速電腦每秒能計算出十億次的搬動, 也需要 585年! □

關於河內塔的搬動的問題及其遞迴關係可參閱網站 "Towers of Hanoi Puzzle" (Zylla, 2007), 提供一個可以讓你自己親自動手有趣的河內塔 Java 網頁。而 "Tower of Hanoi Puzzle on the Web" (Kolar, 2007) 則列出一些網路上與河內塔相關的網頁連結 (包含故事 、搬動方法 、Java 、IE 等互動網頁)。

例 3.6: (n **點圓分割**) 設一個圓上有 n 個點, 每兩點連成一直線, 且沒有任何三條線相交於一點, 試問由此 n 個點所構成的線可劃分成多少塊區域?

解: $n=1,2,\ldots,6$ 個點圓分割見圖 2:

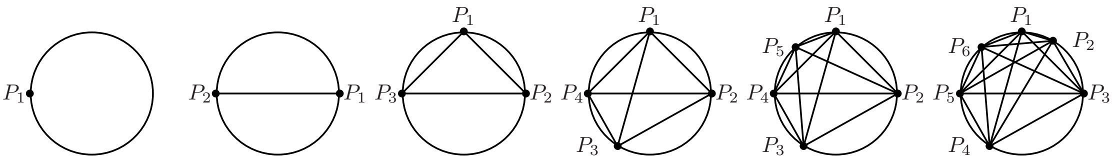


圖 2. n 點圓分割

仔細觀察, 當圓周上每增加一點時, 數列 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $a_5=16$, $a_6=31$,

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1+1\\
a_3 &= a_2+1+1\\
a_4 &= a_3+1+2+1\\
a_5 &= a_4+1+3+3+1\\
a_6 &= a_5+1+4+5+4+1
\end{aligned}
$$

這有點像巴斯卡 (Pascal) 三角形:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&5&&4&&1& \\ 1&&5&&7&&7&&5&&1 \end{array}$$

我們猜測其組成規律是, 每一斜列都是等差數列, 首項皆爲 1, 但公差依次爲 $0, 1, 2, 3, \ldots$。因此, 第 k 横列一共有 k 項, 如下: $1, k-1, 2k-5, 3k-11, 4k-19, \ldots$, 其中第 j 項的通式爲 $(j-1)k-[j(j-1)-1]$, 化簡得 $(j-1)(k-j)+1$, $j=1,2,\ldots,k$, 於是圓周上 k 個點 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 再增加一點 P_{k+1} 時, 所增加的區域數爲 $a_{k+1}-a_k=\sum_{j=1}^{k}[(j-1)(k-j)+1]$, 所以可得 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}[(j-1)(k-j)+1]=\frac{1}{24}(n-1)n(n^2-5n+18)+1$。 □

有關 n 個點所構成的線可劃分成多少塊區域所形成的數列, 可參考網路整數數列百科全書 “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences” (Sloane, 2007, A000127), 裡面詳細列出此數列並有其遞迴公式。

例 3.7: (**雪花-碎形**) 設 ΔABC 是邊長爲 1 的等邊三角形。將三邊分別三等分, 取中間段爲一邊向外側做正三角形, 並且將中間這段擦去, 其次將剩下的每一邊再三等分, 取中間段爲一邊向外做正三角形, 再將中間這段擦去。仿此程序繼續做下去, 得一系列的碎形。求

(a) 第 n 次之碎形的周長及其極限。

(b) 第 n 次之碎形的面積及其極限。

解:

(a) 第 $n=1,2,3$ 個碎形見圖 3: □

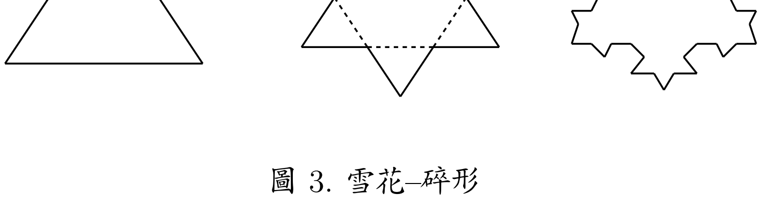


圖 3. 雪花–碎形

設 a_n 表第 n 個碎形的周長, 列表並仔細觀察 、歸納:

第 n 個碎形	1	2	3	4	$\cdots$
周長 a_n	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\cdots$

接下來建立遞迴關係式, 由 $a_1=3$, $a_2=4$ (起始值), 又第 $n+1$ 個碎形的周長 $=$ 第 n 個碎形的周長去掉每一邊的中間段, 再增加中間段的 2倍。得 $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}a_n=\frac{4}{3}a_n$。

由上述可知 $\{a_n\}$ 爲一等比數列, 首項 $a_1=3$, 公比 $r=\frac{4}{3}$, 所以, $a_n=3\cdot(\frac{4}{3})^{n-1}$。當 $n\to\infty$ 時, a_n 趨近於無窮大。

(b) 設 b_n 表第 n 個碎形的面積, 列表並仔細觀察 、歸納:

n	1	2	3	4	$\cdots$
第 n 個碎形較第 $n-1$ 個碎形增加的三角形個數	0	3	$3\cdot 4$	$3\cdot 4^2$	$\cdots$
所增加三角形之面積	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{9})$	$\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{9})^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{9})^3$	$\cdots$

接下來建立遞迴關係式, 由 $b_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$ (起始值), 又第 $n+1$ 個碎形的面積 $=$ 第 n 個碎形的面積, 再增加每線段凸出去的 1 塊新的三角形。得 $b_{n+1}=b_n+3\cdot 4^{n-2}(\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{9})^{n-1})=b_1+3(\frac{1}{9})\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot 4(\frac{1}{9})^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots+3\cdot 4^{n-1}(\frac{1}{9})^n\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}[3(\frac{1}{9})+3\cdot 4(\frac{1}{9})^2+3\cdot 4^2(\frac{1}{9})^3+\cdots+3\cdot 4^{n-1}(\frac{1}{9})^n]$。

由上述可知 $[3(\frac{1}{9})+3\cdot 4(\frac{1}{9})^2+3\cdot 4^2(\frac{1}{9})^3+\cdots+3\cdot 4^{n-1}(\frac{1}{9})^n]$ 爲一等比級數, $c_1=\frac{1}{3}$, $r=\frac{4}{9}$, 當 $n\to\infty$ 時其值爲 $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3}{5}$, 所以當 $n\to\infty$ 時, 面積趨近於一定值 $b_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{3}{5})=\frac{2\sqrt{3}}{5}$。 □

更進一步相關碎形介紹可參閱維基網站: Fractal (2007)。

一階非齊次線性遞迴關係式

$$a_{n+1}=g(n)a_n+f(n) \tag{3.9}$$

也可以利用以下的方法化簡成齊次式的解法。設特解 $a_n^{(p)}$ 滿足原遞迴關係式 (3.9), 即

$$a_{n+1}^{(p)}=g(n)a_n^{(p)}+f(n) \tag{3.10}$$

考慮 (3.9) 減去 (3.10) 即得數列 $\{a_n-a_n^{(p)}\}$ 的一個齊次關係式

$$\Big(a_{n+1}-a_{n+1}^{(p)}\Big)=g(n)\Big(a_n-a_n^{(p)}\Big)$$

因此 $(a_n - a_n^{(p)}) = g(n-1)(a_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) = g(n-1)g(n-2)(a_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) = \cdots = (\prod_{k=0}^{n-1} g(k))(a_0 - a_0^{(p)})$, 所以 $a_n = a_n^{(p)} + (\prod_{k=0}^{n-1} g(k))(a_0 - a_0^{(p)})$。

例 3.8: 設遞迴關係式 $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $n \geq 0$, $a_0 = 2$, 求 a_n 的解。

解: 設 $a_n^{(p)} = c$ 代入關係式得 $c = 3c - 2$, 所以 $c = 1$。因此, $a_n - 1 = 3(a_{n-1} - 1) = 3^2(a_{n-2} - 1) = \cdots = 3^n(a_0 - 1) = 3^n$, 所以 $a_n = 3^n + 1$。 □

習題 3

下列是一些不錯的題目, 也許讀者有興趣試試, 爲了方便讀者, 我們也將答案列入。

1. 設 $a_n = 3a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 5$, 求 a_n 的一般解。 (答案: $5(3^n)$)

   將關係式逐項代入即得

$$\begin{aligned} a_0 &= 5 \\ a_1 &= 3a_0 = 3(5) \\ a_2 &= 3a_1 = 3^2(5) \\ &\vdots \\ a_n &= 3^n(5) \end{aligned}$$

   所以 $a_n = 5(3^n)$ 是此遞迴關係式的一般解。

2. 設 $a_n = a_{n-1} + c_1$, $n \geq 1$, $a_0 = c_2$, 求 a_n 的一般式。 (答案: $c_2 + nc_1$)

   由關係式得 $a_n = a_{n-1} + c_1 = (a_{n-2} + c_1) + c_1 = a_{n-2} + 2c_1 = (a_{n-3} + c_1) + 2c_1 = a_{n-3} + 3c_1 = \cdots = a_0 + nc_1 = c_2 + nc_1$, 所以$a_n = c_2 + nc_1$。

3. 給定以下的條件及起始值, 唯一決定下列的等比數列, 求此數列的遞迴關係式。

   (答案: $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 7$)

$$7, 14/5, 28/25, 56/125, \ldots$$

$$\begin{aligned} \frac{14}{5} &= \frac{2}{5} \cdot 7 \\ \frac{28}{25} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{14}{5} \\ \frac{56}{125} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{28}{25} \\ &\vdots \end{aligned}$$

   所以 $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1}$, $n \geq 1$, $a_0 = 7$ 爲該數列的遞迴關係式。

4. 將 \$500 存於某家銀行, 其年利率爲 6%, 每個月以複利計算, 求 10年後其本利和。

(答案: 909.698)

設 a_n 爲 n 個月後的本利和, $a_0 = 500$,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0(1+0.06/12) = 500(1.005) = 502.5 \\ a_2 &= a_1(1+0.06/12) = 500(1.005)^2 = 505.0125 \\ a_3 &= a_2(1+0.06/12) = 500(1.005)^3 = 507.53755 \end{aligned}$$

所以 $a_n = a_0(1.005)^n$, 因此 10年後, 即 120個月後, 本利和爲 $a_{120} = 500(1.005)^{120} = 909.698$。

5. 某甲於某銀行存款 \$500, 年利率爲 8%, 如果以每一季複利來算, 則需多久時間可以得到本金的兩倍?

(答案: 9)

設 a_n 表示 n 季後的本利和, 則 $a_{n+1} = a_n(1+\frac{0.08}{4}) = (1.02)a_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 500$, 所以當本利和變成本金的兩倍時, 即 $1000 = 500(1.02)^n$, 因此 $n = \frac{\log 2}{\log 1.02} \cong 35.003$, 所以, 在 36季後, 即 9年後, 可以得到本金的兩倍 (以上)。

6. 設 a_n 表示由四個元素 $(0,1,2,3)$ 組成的 n 位數, 且 3不會在 0的右邊,

(a) 試求 a_n 的遞迴關係式。

(b) 求解 (a) 中的遞迴關係。

(答案: (a) $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$, $n \geq 2$, $a_1 = 4$ (b) $3^{n-1}(n+3)$)

(a) 考慮一個滿足 3不在 0右邊的四元 n 序列的最右邊的數字, 可分爲下列兩種情況:

(1) 若最右邊的數字爲 0, 1, 或 2時, 則前面 $n-1$ 個數字須滿足 3不在 0的右邊, 其序列數有 a_{n-1} 種。

(2) 若最右邊的數字爲 3時, 則前面 $n-1$ 個數字只要不出現 0必符合所求, 其序列數有 3^{n-1}種。

而 a_n 的起始條件: 當 $n = 1$ 時, 0, 1, 2, 3皆符合所求, 所以 $a_1 = 4$。當 $n = 2$ 時, 除了 03不符合所求外, 其餘 15種皆符合所求, 所以 $a_2 = 15$。因此

$$a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}, \quad n \geq 2, a_1 = 4$$

(b) 考慮下列 $n-1$ 個式子的和

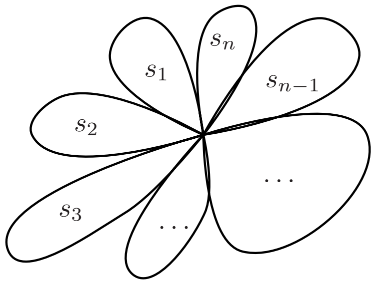
$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 3^{n-1} \\ 3a_{n-1} &= 3(3a_{n-2} + 3^{n-2}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$3^{n-2}a_2 = 3^{n-2}(3a_1 + 3^1)$$

得到 $a_n = 3^{n-1}a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} 3^k \cdot 3^{n-1-k} = 4 \cdot 3^{n-1} + 3^{n-1}(n-1) = 3^{n-1}(n+3)$。

7. 有多少種 4個位元包含偶數個 0的排列? (答案: 7048)
設 a_n 爲含偶數個 0的 n 個位元的排列數, 要得到此種排列:
首先, 附加上一個非零位數在 $n-1$ 位數包含偶數個零的字串, 共有 $9a_{n-1}$ 種方法, 接下來, 加上一個零到有奇數個零的 $n-1$ 位數的字串, 所以有 $10^{n-1} - a_{n-1}$ 種方法。因此 $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$。起始條件爲 $a_1 = 9$, 所以 $a_2 = 8a_1 + 10 = 82$, $a_3 = 8a_2 + 100 = 756$, $a_4 = 8a_3 + 1000 = 7048$。

8. (著色問題) 地圖上某一地區有 n 個國家相鄰, 但 n 個國家只有一個公共點。現用紅 、黃 、綠三種顏色給地圖染色, 但不許相鄰的國家有相同的顏色, 問共有多少種染法?
(答案: $2^n + 2 \cdot (-1)^n$)



設共有 a_n 種染法。對第一個國家 s_1 共有三種染法 (可塗紅 、或黃 、或綠), 則塗去 s_1 後, 對第二個國家 s_2 只有兩種染法 (s_1 染色後, 對 s_2 只有兩種顏色可以選擇了), 同理, 對 s_3 有 2種染法, 對 $s_4, s_5, \ldots$ 直到 s_n 每個國家都有 2種染法, 所以共有 $3 \times 2^{n-1}$ 種染法。而在對 s_n 染色時, 是以 s_{n-1} 爲基準的, 它有 2種染法, 這兩種顏色可能與 s_1 不同色, 也可能與 s_1 同色, 而 s_n 與 s_1 同色情形必須排除。但 s_n 與 s_1 同色的情形有多少種呢? 事實上只要把 s_n 與 s_1 的交界線拆除就成爲同一塊了, 這時就是 $(n-1)$ 塊不同的染法 , 即 a_{n-1} 種, 所以, $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - a_{n-1}$, 且我們已知 $a_2 = 6$。考慮下列 $n-2$ 個式子的和

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - a_{n-1} \\ -a_{n-1} &= -3 \cdot 2^{n-2} + a_{n-2} \\ &\vdots \\ (-1)^{n-3}a_3 &= (-1)^{n-3}(3 \cdot 2^2 - a_2) \end{aligned}$$

得到 $a_n = \sum_{k=3}^{n-1} 3(-1)^{n-k} \cdot 2^{k-1} - (-1)^{n-3} \cdot a_2 = (2^n + (-1)^{n-3} \cdot 2) - (-1)^{n-3} \cdot 6 = 2^n + 2(-1)^n$。所以 $a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$

9. 有多少種 n 位數 $d_nd_{n-1}\cdots d_1$, $d_i=0,1,\ldots,9$, $i=1,2,\ldots,n$, 包含偶數個 0的排列?

(答案: $\frac{1}{2}(2^{3n+1}-8^n+10^n)$)

設 a_n 爲含偶數個 0的 n 位數的排列數, 很明顯 $a_1=9(1,2,\ldots,9)$, 而要得到 n 位數此種排列: 首先, 附加上一個非零位數在 $n-1$ 位數包含偶數個零的字串, 共有 $9a_{n-1}$ 種方法。接下來, 加上一個零到有奇數個零的 $n-1$ 位數的字串, 所以有 $10^{n-1}-a_{n-1}$ 種方法。因此 $a_n=9a_{n-1}+(10^{n-1}-a_{n-1})=8a_{n-1}+10^{n-1}$。考慮下列 $n-1$ 個式子的和

$$\begin{aligned} a_n &= 8a_{n-1}+10^{n-1}\\ 8a_{n-1} &= 8(8a_{n-2}+10^{n-2})\\ &\vdots\\ 8^{n-2}a_2 &= 8^{n-2}(8a_1+10^1) \end{aligned}$$

得到 $a_n=8^{n-1}a_1+10^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}(\frac{8}{10})^k=9\cdot 8^{n-1}+5\cdot 10^{n-1}[1-(\frac{8}{10})^{n-1}]=\frac{1}{2}(2^{3n+1}-8^n+10^n)$。

10 (生長模型) 設時間 0時有一隻不知名的細菌, 該細菌每經過一個單位時間個數會成長一倍, 且假設所有細菌皆不死亡, 求時間 n 單位時細菌總數。 (答案: 2^n)

設時間 n 時細菌總數爲 a_n, 依題意得 $a_{n+1}=2a_n$, $n\geq 0$, $a_0=1$, 由遞迴關係可知 $a_n=2a_{n-1}=2^2a_{n-2}=2^3a_{n-3}=\cdots=2^{n-1}a_1=2^na_0=2^n$, 所以得到 $a_n=2^n$。

11. 在一個平面上, n 條線可以劃分出幾個區域? (沒有任兩條線是平行的, 或是三條線交於一點。) (答案: $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$)

設 a_n 是 n 條線劃分出來的區域總數, 我們可以很容易地知道, $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=7$。如果第 $n+1$ 條線被加到已被 n 條線劃分出的 a_n 個區域, 這條新線會跟原始的 n 條線有交點, 所以這些交點將第 $n+1$ 條線分成 $n+1$ 段, 每一段使原本的區域劃分爲二, 所以 $a_{n+1}=a_n+(n+1)$, $n\geq 1$, 且 $a_1=2$, 考慮下列 $n-1$ 個式子的和

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}+n\\ a_{n-1} &= a_{n-2}+n-1\\ &\vdots\\ a_2 &= a_1+2 \end{aligned}$$

得到 $a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}k=2+\frac{1}{2}(n^2+n-2)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$。

12. (a) 設 $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$, 求 I_n 的遞迴關係式。

(b) 證明 $I_{2n}=\dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}\cdot\dfrac{\pi}{2}$。

(c) 證明 $I_{2n+1} = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$。 (答案: (a) $\frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$)

(a) 利用部分積分, 設 $u = \sin^{n-1} x$ 且 $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$。令

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \end{aligned}$$

因爲 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 所以 $I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)I_n$, 移項作整理即可得 $I_n = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$ 解爲 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$。

(b) 由 (a) 知 $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots = \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdots \dfrac{1}{2} I_0$, 而$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \dfrac{\pi}{2}$, 所以 $I_{2n} = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \cdot \dfrac{\pi}{2}$。

(c) 由 (a) 知 $I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \cdots = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2n-2}{2n-1} \cdots \dfrac{2}{3} I_1$, 而 $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$, 所以 $I_{2n+1} = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$。

參考文獻

1. Brualdi, R. A., *Introductory Combinatorics*, 4th edition. Prentice Hall, New York, 2005.
2. D'Angelo, J. P. and West, D. B., *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs*, 2nd edition. Prentice Hall, New York, 1999.
3. Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O., *Concrete Mathematics*, 2nd edition. Addison Wesley, New York, 1994.
4. Grimaldi, R. P., Recurrence relations. In *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics* by Rosen, K. H. (Editor). Boca Raton, Florida: CRC, 1999.
5. Kelley, W. G. and Peterson, A. C., *Difference Equations: An Introduction with Applications*, 2nd edition. Academic Press, New York, 2000.
6. Loy, J., *Fibonacci Numbers*. 2007 Jun 20. Available from: http://www.jimloy.com/algebra/fibo.htm
7. Sedgewick, R. and Flajolet, P., *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, New York, 1996.
8. Sloane, N. J. A., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2007 Jun 20. Available from: http://www.research.att.com/~njas/sequences/

9. Spiegel, M. R., *Schaum's Outline of Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. McGraw-Hill, New York, 1971.
10. Stanley, R. P., *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2. Cambridge University Press, New York, 1999.
11. Tucker, A., *Applied Combinatorics*, 4th edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.
12. Wolfram, S., *The Mathematica Book*, 5th edition. Champaign, IL: Wolfram Media, 2003.
13. 游森棚, 談談九十五學年度高中數學新課程大綱的 "遞迴"。2008 February 25。Available from: http://umath.nuk.edu.tw/~senpengeu/HighSchool/recurr.pdf

—本文作者張福春任教國立中山大學應用數學系, 莊淨惠爲國立中山大學應用數學系碩士班畢業生—